

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

EQUAZIONI DI TIPO FUCHS

21-28 GENNAIO 1982

## 0. EQUAZIONI ORDINARIE

La teoria delle equazioni (ordinarie) di tipo Fuchs è un capitolo classico dell'Analisi (Cfr. il testo di Wasow).

La teoria è stata recentemente inquadrata nell'ambito naturale delle equazioni differenziali a *punti singolari regolari*, attraverso i contributi della scuola francese (Malgrange, Deligne, ecc.) e di quella giapponese (Sato, Komatsu, ecc.).

L'esposizione che segue è fatta in vista di porre in evidenza problemi e tecniche che, in forma assai più complessa, si ripresentano nel caso di equazioni a derivate parziali di tipo Fuchs (su cui riferirà Jeff E. Lewis).

## 1. EQUAZIONI ORDINARIE DI FUCHS

Un'equazione di Fuchs d'ordine  $m$  e peso  $m-k$  ( $k, m$  interi,  $1 \leq k \leq m$ ) è un'equazione del tipo:

$$(1.1) \quad p u = \left[ t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^k a_j(t) t^{k-j} \partial_t^{m-j} + \sum_{i=1}^{m-k} b_i(t) \partial_t^{m-k-i} \right] u = f,$$

dove  $\partial_t = d/dt$  ed i coefficienti  $a_j, b_i$ , sono funzioni "regolari" (almeno  $C^\infty$ ) su un intervallo aperto  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ . Non supporremo, contrariamente al solito, che i coefficienti siano analitici.

Un esempio significativo è fornito dall'equazione di Bessel:

$$(1.1)' \quad B_\nu u = (t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + t^2 - \nu^2) u = f,$$

dove  $v \in \mathbb{C}$  (l'"ordine" di  $B_v$ ).

I problemi di cui vogliamo occuparci qui riguardano: risolubilità (locale) di  $Pu = f$ , vicino a  $t = 0$ , quando  $f \in C^\infty$  (o  $f$  è analitica), ovvero se  $f \in \mathcal{D}'$ , e struttura delle soluzioni dell'eq. omogenea.

Conviene associare all'operatore il *polinomio indiciale*

$$(1.2) \quad I_p(z) = z(z-1) \dots (z-m+1) + z(z-1) \dots (z-m+2) a_1(0) + \dots + \\ + z(z-1) \dots (z-(m-k-1)) a_k(0), \quad z \in \mathbb{C};$$

tale polinomio si ottiene naturalmente quando si cerchi una soluzione di  $t^{m-k}(t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^k a_j(0) t^{k-j} \partial_t^{m-j}) u(t) = 0$ ,  $t > 0$ , nella forma  $u(t) = t^z$ .

Si noti che se  $m = k$  il coefficiente di  $a_k(0)$  è 1. Per  $m > k$   $I_p(z) = 0$  ha le radici  $z = 0, 1, \dots, m-k-1$ . Nel caso  $m = k$  trasformiamo la equazione  $Pu = f$  in un sistema *equivalente* secondo lo schema seguente.

Ricordiamo che:

$$t^p \partial_t^p = (t \partial_t - (p-1)) (t \partial_t - (p-2)) \dots t \partial_t, \quad p \geq 2.$$

Poniamo:

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = t \partial_t u_1 = t \partial_t u \\ u_3 = (t \partial_t - 1) u_2 = (t \partial_t - 1) t \partial_t u = t^2 \partial_t^2 u \\ \dots \\ u_m = (t \partial_t - (m-2)) u_{m-1} = \dots = t^{m-1} \partial_t^{m-1} u \end{cases}$$

Allora:



$$(1.4) \quad \begin{cases} t \partial_t u_1 = u_2 \\ t \partial_t u_2 = u_2 + (t \partial_t - 1) u_2 = u_2 + u_3 \\ t \partial_t u_3 = 2 u_3 + (t \partial_t - 2) u_3 = 2 u_3 + u_4 \\ \dots\dots\dots \\ t \partial_t u_m = (m-1) u_m + (t \partial_t - (m-1)) u_m = \\ = (m-1) u_m + t^m \partial_t^m u = \\ = (m-1) u_m - \sum_{j=1}^m a_j(t) u_{m-j+1} + f \end{cases}$$

e quindi il vettore  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$  soddisfa il sistema:

$$(1.5) \quad (t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u} = \vec{f}$$

Dove  $\vec{f} = (0, 0, \dots, 0, f)$  e  $A(t)$  è la matrice  $m \times m$ :

$$(1.6) \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & m-2 & 1 \\ -a_k(t) & -a_{k-1}(t) & \dots & & & & & -a_2(t) - a_1(t) + (m-1) \end{pmatrix}$$

Ora è facile vedere che  $\det(z I_m - A(0)) = I_p(z)$ .

Consideriamo ora un sistema del tipo sopra indicato, i.e.

$$(1.7) \quad (t \partial_t I_m - A(t)) \vec{v} = \vec{g}$$

dove  $A(t) \in C^\infty(I; L(C^m))$ ,  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  aperto.

Un modo interessante di affrontare (1.7) è di chiedersi se esista una matrice  $C(t) \in C^\infty(J; L(C^m))$ ,  $0 \in J \subset I$ , tale che:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} 1) & C(0) = I_m \\ 2) & (t \partial_t I_m - A(t)) C(t) = C(t) (t \partial_t I_m - A(0)), \forall t \in J. \end{aligned}$$

Per trovare  $C(t)$  soddisfacente (1.8), consideriamo la serie di Taylor:

$$A(t) \sim \sum_{l \geq 0} A_l t^l, \quad A_l = \frac{1}{l!} \partial_t^l A(t)|_{t=0}, \quad \text{e cerchiamo}$$

$$C(t) \sim \sum_{l \geq 0} C_l t^l.$$

Imporre (1.8) equivale a richiedere:

$$(1.8)' \quad \begin{cases} C_0 = I_m \\ t \partial_t C(t) - [A(t) C(t) - C(t) A_0] = 0, \text{ su } J. \end{cases}$$

Otteniamo così le equazioni matriciali:

$$(1.9) \quad \begin{cases} A_0 C_0 - C_0 A_0 = 0 \\ l C_l - A_0 C_l - C_l A_0 = \\ = C_l A_0 - (A_0 - l I_m) C_l = \sum_{j=0}^{l-1} A_{l-j} C_j, \quad l \geq 1. \end{cases}$$

La prima di (1.9) è soddisfatta con  $C_0 = I_m$ . Per risolvere le altre equazioni utilizziamo il risultato seguente.

Se  $F, G$  sono 2 matrici  $m \times m$ , affinché l'eq.  $PF - GP = Q$  ammetta soluzione (matrice  $m \times m$ ) quale che sia  $Q$  (matrice  $m \times m$ ) occorre e basta che  $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \emptyset$ , i.e.  $F$  e  $G$  non hanno autovalori comuni. Prova: si tratta di studiare l'iniettività della mappa lineare  $p \mapsto PF - GP$ . Sia  $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \emptyset$  e  $PF - GP = 0$ . Allora  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  e  $\forall r \in \mathbb{N}$  si ha  $P(F - \lambda I_m)^r - (G - \lambda I_m)^r P = 0$ . Utilizzando il teorema di Jordan,  $\mathbb{C}^m = \bigoplus_{j=1}^v \text{Ker}(F - \lambda_j I_m)^{r_j}$ , dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_v$  sono gli autovalori distinti di  $F$  e  $r_j$  è la molteplicità algebrica di  $\lambda_j$ . Se  $x \in \text{Ker}(F - \lambda_j I_m)^{r_j}$  si ha  $(G - \lambda_j I_m)^{r_j} x = 0$  e quindi  $x = 0$  se  $\lambda_j \notin \sigma(G)$ . Dunque, se  $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \emptyset$ ,  $P = 0$ . D'altra parte, se  $\sigma(F) \cap \sigma(G) \neq \emptyset$  è facile costruire un esempio di  $P \neq 0$  per cui  $PF - GP = 0$ .

Diremo che il sistema  $t \partial_t I_m - A(t)$  verifica la condizione di Fuchs se:

$$(1.10) \quad \sigma(A_0) \cap \sigma(A_0 - I_m) = \emptyset, \quad l = 1, 2, \dots$$

(i.e. se gli autovalori distinti di  $A_0 = A(0)$  non differiscono per degli interi).

Se vale (1.10) le eq. (1.9) per  $C_l$ ,  $l \geq 1$ , sono univocamente risolubili e quindi resta definita la serie formale  $\sum_{l=1}^{\infty} C_l t^l$ . Usando il Lemma di Borel, costruiamo  $\hat{C} \in C^\infty(I; L(\mathbb{C}^m))$  con  $\hat{C}(t) \sim_{t \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} C_l t^l$ . Per costruzione:

$$(1.11) \quad t \partial_t I_m \hat{C}(t) - [A(t) \hat{C}(t) - \hat{C}(t) A_0] = \Phi(t)$$

è  $C^\infty$  e piatta a  $t = 0$ , i.e.  $\partial_t^j \Phi(t)|_{t=0} = 0 \quad \forall j$ .

Proviamo ora che fissato  $[-T, T] \subset I$ , esiste  $\Psi \in C^\infty([-T, T]; L(\mathbb{C}^m))$ , piatta a  $t = 0$ , per cui risulta  $t \partial_t \Psi - [A(t) \Psi - \Psi(t) A_0] = -\Phi(t)$  su  $(-T, T)$ . Ponendo allora  $C(t) = \hat{C}(t) + \Psi(t)$  siamo a posto.

Se  $B(t) \in C^\infty([-T, T]; L(\mathbb{C}^m))$ , piatta a  $t = 0$ , poniamo:



$$(1.12) \quad (E B)(t) = \int_0^1 B(\rho t) \frac{d\rho}{\rho}$$

E' facile vedere che  $E B \in C^\infty([-T, T]; L(C^m))$  ed è piatta a  $t = 0$ . Si noti che

$$\partial_t^j E B(t) = \int_0^1 \rho^j B^{(j)}(\rho t) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Sicché

$$(1.13) \quad t \partial_t E B(t) = \int_0^1 t B'(\rho t) d\rho = B(t).$$

Per  $N = 0, 1, \dots$ , poniamo:

$$(1.14) \quad q_N(B) = \sup_{\substack{|t| \leq T \\ 0 \leq j \leq N}} |t^{-N} B^{(j)}(t)|$$

Allora:

$$(1.15) \quad q_N(E B) = \sup_{\substack{|t| \leq T \\ 0 \leq j \leq N}} \left| \int_0^1 (\rho t)^{-N} \rho^{N+j} B^{(j)}(\rho t) \frac{d\rho}{\rho} \right|$$

$$\leq q_N(B) \int_0^1 \rho^{N+j-1} d\rho \leq \frac{1}{N} q_N(B), \text{ se } N \geq 1.$$

Definiamo  $K: B(t) \rightarrow A(t) B(t) - B(t) A_0$ . Usando il metodo di Picard, per risolvere  $(t \partial_t - K) B = -\Phi$ , poniamo  $\Psi_0 = 0$ ,  $\Psi_1 = E\{K(\Psi_0) - \Phi\}, \dots$ ,  $\Psi_{n+1} = E\{K(\Psi_n) - \Phi\}, \dots$ .

Da (1.15) segue che esiste una successione  $1 \leq N_j \uparrow +\infty$  per cui:

$$(1.16) \quad q_{N_j}(\Psi_{n+1} - \Psi_n) < \frac{1}{2} q_{N_j}(\Psi_n - \Psi_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

Dunque  $\{\psi_n\}$  converge su  $C^\infty([-T, T]; L(C^m))$  ad una  $\psi$ , piatta a  $t = 0$  che risolve  $t \partial_t \psi - K \psi = -\phi$  su  $(-T, T)$ .

N.B. Se  $A(t) \in A(I; L(C^m))$  e soddisfa la condizione di Fuchs, allora  $\sum_{l \geq 0} C_l t^l$  converge ad una funzione analitica in un intorno di  $t = 0$  (esercizio).

Dunque se vale la condizione di Fuchs, il sistema  $t \partial_t I_m - A(t)$  "equivale" localmente (vicino a  $t = 0$ ) al sistema a coefficienti costanti  $t \partial_t I_m - A(0)$ !

Nel caso dell'equazione di Bessel, la condizione di Fuchs significa che  $2 \nu \notin \mathbb{Z}$ .

Cosa si può dire se la condizione di Fuchs è violata? A patto di commutare  $A(t)$  con una opportuna matrice in  $GL(m; \mathbb{C})$ , possiamo supporre dall'inizio che  $A(0)$  sia una matrice diagonale a blocchi, del tipo:

$$(1.17) \quad A(0) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_v \end{pmatrix}$$

dove  $A_j$  è una matrice  $m_j \times m_j$  del tipo:



$$(1.18) \quad A_j = \begin{pmatrix} \mu_j & * & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_j & \\ \hline & & & \mu_j^{-1} & * & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_j^{-1} \\ \hline & & & & & & \mu_j^{-l_j+1} & * & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \mu_j^{-l_j+1} \end{pmatrix}$$

dove  $l_j$  è un intero  $\geq 1$ ,  $\mu_j \in \mathbb{C}$  ed i blocchi in  $A_j$  sono in forma di Jordan di certe dimensioni e, infine,  $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$  se  $i, j = 1, \dots, v$ ,  $i \neq j$ .

E' possibile modificare la costruzione precedente e provare che esistono 2 matrici  $C(t), \hat{A}(t) \in C^\infty(J; L(\mathbb{C}^m))$ ,  $0 \in J \subset I$ , tali che:

- 1)  $C(0) = I_m$  (più in generale  $C(0) \in GL(m; \mathbb{C})$ ).
- 2)  $\hat{A}(t)$  è diagonale a blocchi  $\hat{A}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, v$ , con  $\hat{A}_j(0) = A_j$ ,  $\forall j$ .
- 3)  $(t \partial_t I_m - A(t)) C(t) = C(t) (t \partial_t I_m - \hat{A}(t))$ ,  $t \in J$  (se  $A(t)$  è analitica,  $C(t)$  e  $\hat{A}(t)$  si possono scegliere analitiche).

Ne segue che il sistema  $t \partial_t I_m - A(t)$  è "equivalente" a  $v$  sistemi *disaccoppiati*  $t \partial_t I_{m_j} - \hat{A}_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, v$ . Ci basterà esaminare uno di questi.

Se in  $\hat{A}_j(0) = A_j$  si ha  $l_j = 1$ , allora  $t \partial_t I_{m_j} - \hat{A}_j(t)$  verifica la condizione di Fuchs e quindi è localmente equivalente a  $t \partial_t I_{m_j} - A_j$ .

Consideriamo dunque il caso in cui  $l_j > 1$ . Per semplificare le notazioni sopprimiamo l'indice  $j$ . Se abbiamo il sistema:

$$(1.19) \quad (t \partial_t I_m - \hat{A}(t)) \vec{v} = \vec{f}$$

con

$$(1.19)' \quad \hat{A}(0) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu & * & \\ & \ddots & \\ & & \mu \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{ccc} & \mu-1 & * \\ & & \ddots \\ & & & \mu-1 \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{ccc} & & \mu-(1-1) & * \\ & & & \ddots \\ & & & & \mu-(1-1) \end{array} \end{array} \end{pmatrix}$$

$\mu \in \mathbb{C}$ ,  $1 \geq 2$ ; scriviamo  $\vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_1)$  corrispondentemente alle dimensioni dei blocchi. Utilizzeremo ora un'idea che credo sia di Malgrange(?).

Dico che ponendo:

$$(1.20) \quad \vec{w}_1 = \vec{v}_1, \dots, \vec{w}_{1-1} = \vec{v}_{1-1}, \vec{w}_1 = t \vec{v}_1$$

il vettore  $\vec{w}$  soddisfa un sistema del tipo

$$(1.21) \quad (t \partial_t I_m - \hat{A}(t)) \vec{w} = \vec{g}$$

dove  $\vec{g} = (\vec{f}_1, \dots, t \vec{f}_1)$  e

$$(1.21)' \quad \tilde{A}(0) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu & & * \\ 0 & \ddots & \mu \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu-1 & & * \\ 0 & \ddots & \mu-1 \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu-(1-2) & & * \\ 0 & \ddots & \mu-(1-2) \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \\ \hline & & & \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu-(1-2) & & * \\ 0 & \ddots & \mu-(1-2) \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \end{array} \end{pmatrix}$$

In effetti:

$$t \partial_t \vec{v}_j = \sum_{h=1}^l B_{jh}(t) \vec{v}_h + \vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, l$$

con  $\tilde{A}(t) = (B_{jh}(t))_{j,h=1,\dots,l}$

Poiché  $B_{j1}(t)|_{t=0} = 0$  per  $j = 1, \dots, l$ , si ha

$$B_{j1}(t) = t \tilde{B}_{j1}(t) \text{ per una matrice } C^\infty \tilde{B}_{j1}(t). \text{ Allora:}$$

$$t \partial_t \vec{w}_j = \sum_{h=1}^{l-1} B_{jh}(t) \vec{w}_h + \tilde{B}_{j1}(t) \vec{w}_1 + \vec{f}_j, \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Infine

$$\begin{aligned} t \partial_t \vec{w}_1 &= t \partial_t (t \vec{v}_1) = \\ &= t t \partial_t \vec{v}_1 + \vec{w}_1 = \\ &= \sum_{h=1}^{l-1} t B_{1h}(t) \vec{w}_h + (B_{11}(t) + I) \vec{w}_1 + t \vec{f}_1 \end{aligned}$$



A questo punto esiste una matrice invertibile  $H \in GL(m; C)$  per cui:

$$(1.22) \quad \tilde{A}(0) = H^{-1} \tilde{A}(0) H = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mu & * \\ 0 & \ddots & \mu \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{ccc} \mu-1 & & * \\ & \ddots & \\ & 0 & \mu-1 \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{ccc} \mu-(1-2) & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu-(1-2) \end{array} \end{array} \end{pmatrix}$$

dove i blocchi sono di nuovo in forma di Jordan.

Sicché:

$$(t \partial_t I_m - \tilde{A}(t))H = H(t \partial_t I_m - \tilde{A}(t))$$

dove  $\tilde{A}(t)$  è nella stessa situazione di  $\tilde{A}(t)$  salvo che gli autovalori sono solo  $\mu, \mu-1, \dots, \mu-(1-2)$ .

Se  $l = 2$ , allora  $t \partial_t I_m - \tilde{A}(t)$  è "equivalente" localmente (a  $t = 0$ ) al sistema  $t \partial_t I_m - \tilde{A}(0)$ . In caso contrario ripetiamo il procedimento ora indicato. Dopo un numero finito di passi arriveremo ad un sistema  $t \partial_t I_m - A^*(t)$  con  $A^*(0)$  che ha il solo autovalore  $\mu$  e quindi soddisfa la condizione di Fuchs. Naturalmente occorre tener presente che il passaggio da  $t \partial_t I_m - \tilde{A}(t)$  a  $t \partial_t I_m - A^*(t)$  non avviene mediante una matrice invertibile a  $t = 0$ !!

## 2. RISOLUBILITA' IN $C^\infty$ DI UN'EQUAZIONE (ORDINARIA) DI FUCHS

Consideriamo l'operatore di Fuchs (1.1)

$$(2.1) \quad P = t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^k a_j(t) t^{k-j} \partial_t^{m-j} + \sum_{i=1}^{m-k} b_i(t) \partial_t^{m-k-i}$$

con  $a_j, b_i \in C^\infty(I)$ ,  $0 \in I \subset \mathbb{R}$ .

Vale il teorema:

Teorema 1. La mappa  $(P, \gamma): C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$ ,  
 $u \mapsto (Pu, \gamma(u) = (\partial_t^j u|_{t=0})_{0 \leq j \leq m-k-1})$  è un isomorfismo se e solo se  
 $I_P(z) \neq 0, \forall z \in \{m-k, m-k+1, \dots\}$  (se  $m = k$ , si considera solo  
 $P: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ ).

Prova. Dimostriamo la cosa dapprima se  $m = k$ .

Trasformiamo l'equazione  $Pu = f$  nel sistema equivalente:

$$(2.2) \quad (t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u} = \vec{f}$$

come nella sez. 1.

Dire che  $P: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$  è suriettivo equivale a dire che  
 $t \partial_t I_m - A(t): C^\infty(I)^m \rightarrow C^\infty(I)^m$  è suriettiva. Se  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u} = \vec{f}$ ,  
 allora  $A(0) \vec{u}(0) = \vec{f}(0)$ .

Per l'arbitrarietà di  $\vec{f}(0)$ , ne segue che  $0 \notin \sigma(A(0))$ , i.e.

$I_P(z) \neq 0$  per  $z = 0$ . Derivando il sistema:

$$\vec{u}'(t) + t \vec{u}''(t) - A'(t) \vec{u}(t) - A(t) \vec{u}'(t) = \vec{f}'(t)$$

e quindi  $(I_m - A(0)) \vec{u}'(0) = \vec{f}'(0) + A'(0) \vec{u}(0)$ .

Per l'arbitrarietà di  $\vec{f}'(0)$ , ne segue che  $1 \notin \sigma(A(0))$ , i.e.  $I_p(1) \neq 0$ . Proseguendo così si prova che  $I_p(z) \neq 0$  se  $z \in \{0, 1, \dots\}$ .

Proviamo ora che se  $I_p(z) \neq 0$  quando  $z \in \{0, 1, 2, \dots\}$  allora  $P: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$  è un isomorfismo.

Unicità. Prendiamo  $u \in C^\infty(I)$  e proviamo che se  $Pu(t) = 0$  allora  $u = 0$ . Basterà provarlo per  $t \geq 0$ . Se  $Pu = 0$ , allora  $u \in C^\infty(I)$  ed è piatta a  $t = 0$ . Dunque  $\forall N > 0$ ,  $u(t) = t^N v_N(t)$  per una  $v_N \in C^\infty$  piatta a  $t = 0$ . Ora:

$$\begin{aligned} (t \partial_t - A(t)) [t^N \vec{v}_N(t)] &= \\ = t^N [t \partial_t \vec{v}_N(t) - (A(t) - N I_m) \vec{v}_N(t)] &= 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$(2.3) \quad (t \partial_t I_m - (A(t) - N I_m)) v_N(t) = 0 \quad \text{per } t > 0.$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2} t \frac{d}{dt} |v_N(t)|^2 = (\operatorname{Re}(A(t) - N I_m) v_N(t), v_N(t)).$$

Se  $N > 0$  è abbastanza grande  $(\operatorname{Re}(A(t) - N I_m) v_N(t), v_N(t)) \leq -C_N |v_N(t)|^2$  per  $t \in [0, T]$ , con  $C_N \rightarrow +\infty$ ,  $N \rightarrow +\infty$ . Fissati  $0 < \varepsilon < t < T$ :

$$\frac{1}{2} \int_\varepsilon^t s \frac{d}{ds} |v_N(s)|^2 ds \leq -C_N \int_\varepsilon^t |v_N(s)|^2 ds$$

i.e.

$$\frac{1}{2} (t |v_N(t)|^2 - \varepsilon |v_N(\varepsilon)|^2) \leq - (C_N - \frac{1}{2}) \int_0^t |v_N(s)|^2 ds$$



Se ne deduce che  $v_N(t) = 0$  su  $[0, T]$  (se  $C_N > \frac{1}{2}$ ). Dunque  $u(t)$  è nulla su un intorno  $[0, T]$  di 0.

Per la teoria classica si ha allora  $u(t) = 0$  su  $I$ .

Esistenza. Supponiamo dapprima che il sistema  $t \partial_t I_m - A(t)$  verifichi la condizione di Fuchs. Allora risolvere  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u}(t) = \vec{f}(t)$  equivale a risolvere  $(t \partial_t I_m - A(0)) \vec{w}(t) = C(t)^{-1} \vec{f}$  in un intervallo  $[-T, T] \subset I$  e porre poi  $\vec{u} = C(t) \vec{w}$ .

Dopo questo  $\vec{u}(t)$  si prolunga in una soluzione definita su  $I$ .

Vogliamo dunque risolvere

$$(2.4) \quad (t \partial_t I_m - A(0)) \vec{w}(t) = \vec{g}(t)$$

su un intervallo  $[-T, T] \subset I$ , supponendo  $\vec{g} \in C^\infty(I)^m$  e  $\sigma(A(0)) \cap \{0, 1, 2, \dots\} = \emptyset$ .

Senza minore generalità possiamo ridurci al caso in cui  $\sigma(A(0)) \subset \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0\}$ . Infatti poniamo

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \vec{w}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\vec{w}_j}{j!} t^j + t^N \vec{v}(t) \\ \vec{g}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\vec{g}_j}{j!} t^j + t^N \vec{h}(t) \end{aligned}$$

dove  $\vec{w}_j = \partial_t^j \vec{w}|_{t=0}$ ,  $\vec{g}_j = \partial_t^j \vec{g}|_{t=0}$ . Se vale (2.4) si ha:

$$(2.6) \quad (j I_m - A(0)) \vec{w}_j = \vec{g}_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Sicché:

$$\begin{aligned} (t \partial_t I_m - A(0)) (t^N \vec{v}) &= t^N [t \partial_t \vec{v} - (A - N I_m) \vec{v}] \\ &= \vec{g} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} [(j I_m - A(0)) \vec{w}_j] t^j = t^N \vec{h}(t). \end{aligned}$$

Se quindi sappiamo risolvere:

$$(2.7) \quad (t \partial_t I_m - A(o)) \vec{v} = \vec{h},$$

basterà definire

$$(2.8) \quad \vec{w}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} [(j I_m - A(o))^{-1} \vec{g}_j] t^j + t^N \vec{v}$$

per avere che (2.4) vale. Se  $N$  è grande  $\sigma(A(o) - N I_m) \subset \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0\}$ .

Dunque, senza minore generalità, risolviamo (2.4) supponendo che  $\sigma(A(o)) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$ . Definiamo

$$(2.9) \quad \rho^{-A(o)-I} = e^{-(A(o)+I)\ln \rho} \quad \rho \in ]0,1]$$

e poniamo

$$(2.11) \quad E \vec{g}(t) = \int_0^1 \rho^{-A(o)-I} \vec{g}(\rho t) d\rho.$$

E' chiaro che  $E \vec{g} \in (C^\infty)^m$  e, di più:

$$\begin{aligned} t \partial_t E \vec{g}(t) &= \int_0^1 \rho^{-A(o)} t \vec{g}'(\rho t) d\rho = \\ &= \int_0^1 \rho^{-A(o)} \frac{d}{d\rho} [\vec{g}(\rho t)] d\rho = \\ &= \rho^{-A(o)} \vec{g}(\rho t) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} + A(o) \int_0^1 \rho^{-A(o)-I} \vec{g}(\rho t) d\rho = \\ &= A(o) E \vec{g}(t) + \vec{g}(t) \end{aligned}$$

(N.B.  $\rho^{-A(o)} \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0 + !$ ).

Il risultato è dunque provato nell'ipotesi che sia soddisfatta

ta la condizione di Fuchs. Supponiamo ora che la condizione non sia soddisfatta. Basta evidentemente studiare la risolubilità in  $C^\infty(I)^m$  di un sistema  $(t \partial_t I_m - \hat{A}(t)) \vec{u} = \vec{f}$  con  $\hat{A}(t)$  come in (1.19)!

Abbiamo visto come ad esso si possa associare un sistema  $(t \partial_t I_m - A^*(t)) \vec{w} = \vec{g}$  che soddisfa la condizione di Fuchs. Dunque, data  $\vec{g}$ , siccome  $\sigma(A^*(0)) = \{\mu\} \cap \{0, 1, \dots\} = \emptyset$ , tale sistema ha una soluzione  $C^\infty \vec{w}(t)$  definita su un intervallo  $[-T, T] \subset I$ . Eseguendo su  $\vec{w}$  le trasformazioni a ritroso siamo a posto. Mi limito a farlo vedere nel caso  $l = 2$ , i.e.

$$(2.11) \quad \hat{A}(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix},$$

con  $B_{12}(0) = B_{21}(0) = 0$  e  $B_{11}(0) = \begin{bmatrix} \mu & * \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ,

$B_{22}(0) = \begin{bmatrix} \mu-1 & * \\ 0 & \mu-1 \end{bmatrix}$ . Per costruzione, abbiamo trovato  $(\vec{w}_1(t), \vec{w}_2(t)) \in C^\infty$  tale che

$$\begin{cases} t \partial_t \vec{w}_1(t) = B_{11}(t) \vec{w}_1(t) + \tilde{B}_{12}(t) \vec{w}_2(t) + \vec{f}_1 \\ t \partial_t \vec{w}_2(t) = t B_{21}(t) \vec{w}_1(t) + (B_{22}(t) + I) \vec{w}_2(t) + t \vec{f}_2 \end{cases}$$

dove  $t \tilde{B}_{12}(t) = B_{12}(t)$ . La seconda equazione dà

$$(t \partial_t I - (B_{22}(t) + I)) \vec{w}_2(t) = t [B_{21}(t) \vec{w}_1(t) + \vec{f}_2]$$

Dunque  $-(B_{22}(0) + I) \vec{w}_2(0) = 0$ , ma  $B_{22}(0) + I$  è invertibile, e quindi  $\vec{w}_2(0) = 0$ , sicché  $\vec{w}_2(t) = t \vec{u}_2(t)$  per una  $\vec{u}_2(t) \in C^\infty$  e pertanto; se  $\vec{u}_1 = \vec{w}_1$ :



$$\begin{cases} t \partial_t \vec{u}_1 = B_{11}(t) \vec{u}_1(t) + B_{12}(t) \vec{u}_2(t) + \vec{f}_1(t) \\ t \partial_t \vec{u}_2 = B_{21}(t) \vec{u}_1(t) + B_{22}(t) \vec{u}_2(t) + \vec{f}_2(t) \end{cases}$$

i.e.  $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  soddisfa  $(t \partial_t I_m - \hat{A}(t)) \vec{u} = \vec{f}$ .

Questo discorso può essere ripetuto nel caso  $l > 2$ , provando la tesi. Sia ora  $m \geq k$ .

Sia  $\phi \in C^\infty(I)$  e consideriamo  $P(t^{m-k} \phi)$ . Non è difficile vedere che esiste un operatore Fuchsiano  $\tilde{P}$  d'ordine  $m$  e peso  $0$  tale che

$$(2.12) \quad \begin{cases} P(t^{m-k} \phi) = \tilde{P}(\phi), \quad \forall \phi \in C^\infty(I) \\ I_{\tilde{P}}(z) = I_P(z+m-k), \quad z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Proviamo ora che se  $I_P(z) \neq 0$  per  $z \in \{m-k, m-k+1, \dots\}$  allora la mappa:

$$(2.13) \quad (P, \gamma) : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$$

$$u \rightarrow (Pu, \gamma u = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{\partial_t^j u|_{t=0}}{j!} t^j)$$

è un isomorfismo.

Se  $(P, \gamma) u = 0$  allora  $u$  è del tipo  $u = t^{m-k} \phi$  per una  $\phi \in C^\infty(I)$ , sicché  $Pu = 0$  e  $\tilde{P}\phi = 0$ . Ma  $I_{\tilde{P}}(z) \neq 0$  per  $z \in \{0, 1, \dots\}$  (per (2.12)), sicché  $\phi = 0$ , i.e.  $u = 0$ .

Sia ora

$$f \in C^\infty(I) \quad e \quad \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j \in C^{m-k}$$

Scegliamo  $\phi \in C^\infty(I)$  per cui

$$\begin{aligned} \tilde{P}\phi &= f - P\left(\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!}\right) t^j. \text{ Allora } P\left[\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j + t^{m-k} \phi\right] = \\ &= f e \gamma\left[\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j + t^{m-k} \phi\right] = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j. \end{aligned}$$

Viceversa sia

$$(P, \gamma) : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$$

un isomorfismo (anzi sia su). Allora data  $f \in C^\infty(I)$  sia  $u \in C^\infty(I)$  con  $Pu = f$  e  $\gamma(u) = 0$ . Allora  $u = t^{m-k} \phi$  per una certa  $\phi$ , quindi  $Pu = \tilde{P}\phi = f$ , i.e.  $\tilde{P}$  è suriettivo e quindi  $I_p(z) \neq 0$  per  $z \in \{0, 1, \dots\}$ , i.e.  $I_p(\zeta) \neq 0$  per  $\zeta \in \{m-k, m-k+1, \dots\}$ .

q.e.d.

Nel caso in cui  $P$  abbia coefficienti analitici lo stesso Teorema 1 vale ove si sostituisca  $A(I)$  a  $C^\infty(I)$ .

Per l'equazione di Bessel il Teorema 1 si applica se  $\nu \notin \mathbb{Z}$ .

### 3. RISOLUBILITA' LOCALE IN $\mathcal{D}$ DI UNA EQUAZIONE (ORDINARIA) DI FUCHS

Il Teorema 1, nel caso  $m = k$ , dà una condizione necessaria di risolubilità locale in  $C^\infty$  per l'equazione  $Pu = f$ .

Tuttavia, l'equazione è localmente risolubile, per  $f \in C^\infty$ , anche se  $I_p(z)$  è nullo per qualche  $z \in \{0, 1, \dots\}$ .

A tal fine utilizziamo il Lemma seguente.

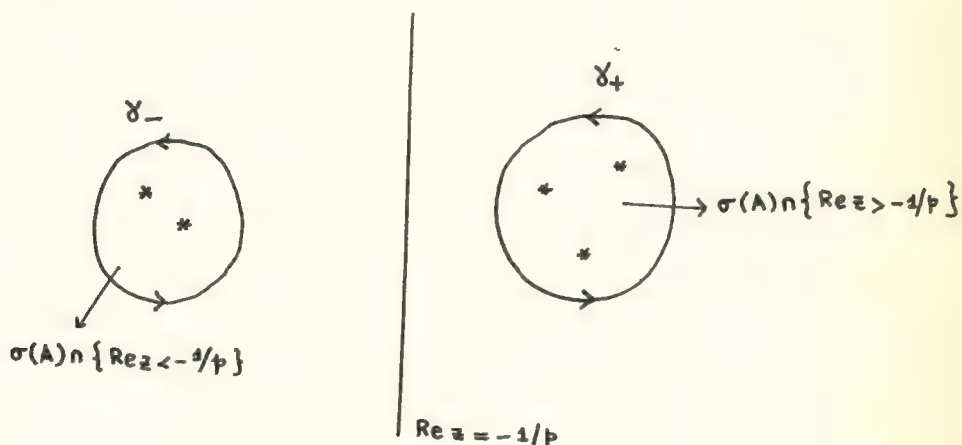
Lemma 1. Si consideri il sistema  $t \partial_t I_m - A$  dove  $A$  è una matrice  $m \times m$  complessa e sia  $p \in (1, +\infty)$  tale che  $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = -1/p\} = \emptyset$ ; allora per ogni  $\vec{f} \in L^p(\mathbb{R})^m$  esiste unica  $\vec{u} \in L^p(\mathbb{R})^m$  tale che:

$$\left| \begin{array}{l} 1) \ t \partial_t \vec{u} \in L^p(R)^m \\ 2) \ (t \partial_t I_m - A) \vec{u} = \vec{f} \quad \text{su } \mathcal{D}'(R)^m \end{array} \right.$$

Prova. Indichiamo con  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  i proiettori:

$$(3.1) \quad \Pi_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\pm}} (z - A)^{-1} dz$$

con  $\gamma_{\pm}$  come in figura



Si ha  $\Pi_+ + \Pi_- = I_m$ ,  $\Pi_+ \Pi_- = \Pi_- \Pi_+ = 0$   
e definiamo:

$$(3.2) \quad \rho^A = e^{A \ln \rho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \rho^z (z - A)^{-1} dz, \quad \rho > 0,$$

dove  $\gamma$  racchiude (in senso antiorario)  $\sigma(A)$ .

Se  $\vec{f} \in C_0^\infty(0, +\infty)^m$  poniamo, per  $t > 0$ :



$$(3.3) \quad E \vec{f}(t) = \int_0^t (\Pi_- \circ (\frac{t}{s})^A) \vec{f}(s) \frac{ds}{s} + \\ - \int_t^{+\infty} (\Pi_+ \circ (\frac{t}{s})^A) \vec{f}(s) \frac{ds}{s}$$

L'integrale converge giacché  $\vec{f}$  è nulla vicino a 0 ed a  $+\infty$ . Risulta

$$t \partial_t E \vec{f}(t) = (\Pi_- + \Pi_+) \vec{f}(t) + A E \vec{f}(t) = \vec{f}(t) + A E \vec{f}(t)$$

Ci proponiamo ora di stimare la norma di  $E \vec{f}$  in  $L^p(R_+)^m$ . Poniamo

$$E_- \vec{f}(t) = \int_0^t [\Pi_- \circ (\frac{t}{s})^A] \vec{f}(s) \frac{ds}{s}.$$

Si ha

$$\|E_- \vec{f}; L^p(R_+)^m\| = \left[ \int_0^{+\infty} |t^{1/p} E_- \vec{f}(t)|^p \frac{dt}{t} \right]^{1/p}$$

Ora

$$(3.4) \quad t^{1/p} E_- \vec{f}(t) = \int_0^t [\Pi_- \circ (\frac{t}{s})^{A+1/p} I] s^{1/p} \vec{f}(s) \frac{ds}{s}$$

Dunque  $t^{1/p} E_- \vec{f}(t)$  è la convoluzione su  $R_+$  con la misura  $\frac{dt}{t}$  di  $s^{1/p} \vec{f}(s)$  con la matrice

$$(3.5) \quad K_-(\sigma) = \begin{cases} \Pi_- \circ \sigma^{A+1/p} I & , \quad \sigma \geq 1 \\ 0 & , \quad 0 < \sigma < 1 \end{cases}$$

Per il Teorema di Hausdorff-Young:

$$(3.6) \quad \|E_- \vec{f}; L^p(R_+)^m\| \leq \\ \leq \left( \int_1^{+\infty} \|\Pi_- \circ \sigma^{A+1/p} I\| \frac{d\sigma}{\sigma} \right) \|\vec{f}; L^p(R_+)^m\|$$

Ora

$$\Pi_- \circ \sigma^{A+1/p} I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \sigma^{\zeta+1/p} I (\zeta - A)^{-1} d\zeta, \quad \sigma \geq 1$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \|\Pi_- \circ \sigma^{A+1/p} I\| \frac{d\sigma}{\sigma} \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} |(\zeta - A)^{-1}| \left[ \int_1^{+\infty} \sigma^{\operatorname{Re} \zeta + 1/p} d\sigma \right] d|\zeta| \leq C$$

perché sul compatto  $\gamma_-$   $\operatorname{Re} \zeta + 1/p < 0$  e  $(\zeta - A)^{-1}$  è limitata.

In modo del tutto analogo, ponendo

$$E_+ \vec{f}(t) = - \int_t^{+\infty} [\Pi_+ \circ (\frac{t}{s})^A] \vec{f}(s) \frac{ds}{s},$$

si prova che:

$$(3.7) \quad \|E_+ \vec{f}; L^p(R_+)^m\| \leq C \|\vec{f}; L^p(R_+)^m\|$$

per una  $C > 0$  indipendente da  $\vec{f}$ . Poiché  $C_0^\infty(R_+)^m$  è denso in  $L^p(R_+)^m$  se ne conclude che

$$(3.8) \quad E : L^p(R_+)^m \rightarrow L^p(R_+)^m$$

con continuità. Inoltre  $(t \partial_t I_m - A) E \vec{f} = \vec{f}$  nel senso delle distribuzion

ni su  $(0, +\infty)$ ,  $\forall \vec{f} \in L^p(R_+)^m$ . E' chiaro che  $A \in \vec{f} \in L^p(R_+)^m$  e quindi  $t \partial_t \vec{f} \in L^p(R_+)^m$ .

Dimostriamo, incidentalmente, ora che se  $\vec{u} \in L^p(R_+)^m$  e  $(t \partial_t I_m - A) \vec{u} = 0$  in senso debole, su  $(0, +\infty)$ , allora  $\vec{u} = 0$ .

Data  $\vec{\phi} \in C_0^\infty(R_+)^m$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle t \partial_t \vec{u} - A \vec{u}, \vec{\phi} \rangle = \\ &= - \langle \vec{u}, {}^t A \vec{\phi} \rangle - \langle \vec{u}, \partial_t (t \vec{\phi}) \rangle = \\ &= - \langle \vec{u}, t \partial_t \vec{\phi} + ({}^t A + I_m) \vec{\phi} \rangle \end{aligned}$$

Ora  $-({}^t A + I_m)$  ha lo spettro disgiunto da  $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = -1/q\}$ ,  $1/p + 1/q = 1$ .  
Dunque, assegnata  $\vec{v} \in L^q(R_+)^m$  esiste  $\vec{\phi} \in L^q(R_+)^m$  per cui  $t \partial_t \vec{\phi} + ({}^t A + I_m) \vec{\phi} = \vec{v}$ .

Allora

$$\begin{aligned} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= - \langle \vec{u}, t \partial_t \vec{\phi} + ({}^t A + I_m) \vec{\phi} \rangle \\ &= - \langle A \vec{u}, \vec{\phi} \rangle - \langle \vec{u}, \partial_t (t \vec{\phi}) \rangle. \end{aligned}$$

Ora  $\vec{u} \cdot \vec{\phi} \in L^1(R_+)$ ,  $\partial_t (\vec{u} \cdot t \vec{\phi}) \in L^1(R_+)$

$$\text{Dunque} \quad 0 = \int_0^{+\infty} \partial_t (\vec{u} \cdot t \vec{\phi}) = \langle t \partial_t \vec{u}, \vec{\phi} \rangle + \langle \vec{u}, \partial_t (t \vec{\phi}) \rangle$$

e quindi:

$$- \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle t \partial_t \vec{u} - A \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Conclusione, per l'arbitrarietà di  $\vec{v}$ ,  $\vec{u} = 0$ .

(N.B. se  $T < +\infty$  in generale l'unicità salta!).

Sia ora  $\vec{f} \in L^p(R)^m$  e sia  $\vec{u}_+ \in L^p(R_+)^m$  con  $t \partial_t \vec{u}_+ - A \vec{u}_+ = \vec{f}$  su  $(0, +\infty)$  in senso debole.

Sia poi  $\vec{v} \in L^p(R_+)^m$  tale che, posto  $\vec{g}(t) = \vec{f}(-t)$ ,  $t > 0$ , riesca  $t \partial_t \vec{v} - A \vec{v} = \vec{g}$  su  $(0, +\infty)$ . Allora, posto  $\vec{u}_-(t) = \vec{v}(-t)$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ , risulta:

$$t \partial_t \vec{u}_-(t) = (-t) \vec{v}'(-t) = A \vec{v}(-t) + \vec{g}(-t) = A \vec{u}_-(t) + \vec{f}(t).$$

Infine poniamo

$$\vec{u}(t) = \begin{cases} \vec{u}_+(t) & , \quad 0 < t < +\infty \\ \vec{u}_-(t) & , \quad -\infty < t < 0 \end{cases}$$

allora  $\vec{u} \in L^p(R)^m$  di più  $t \partial_t \vec{u} - A \vec{u} = \vec{f}(t)$  su  $(-\infty, +\infty)$  perché, se  $\vec{\phi} \in C_0^\infty(R)^m$ :

$$\begin{aligned} \langle t \partial_t \vec{u} - A \vec{u}, \vec{\phi} \rangle &= - \langle A \vec{u}, \vec{\phi} \rangle - \int_0^{+\infty} \vec{u}(t) \vec{\phi}' + \vec{\phi} \, dt \\ &- \int_{-\infty}^0 \vec{u}(t) \vec{\phi}' + \vec{\phi} \, dt; \text{ ora } \vec{u} \cdot t \vec{\phi} \in L^1(R^\pm) \text{ e} \end{aligned}$$

$\partial_t (\vec{u} \cdot t \vec{\phi}) \in L^1(R^\pm)$  e quindi, come sopra,

$$\langle t \partial_t \vec{u} - A \vec{u}, \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{\phi} \rangle.$$

q.e.d.

Corollario 1. Dato il sistema  $t \partial_t I_m - A(t)$ ,  $A(t) \in C^\infty(I; L(C^m))$ , si supponga che per un  $p \in (1, +\infty)$ ,  $\sigma(A(0)) \cap \{\operatorname{Re} z = -1/p\} = \emptyset$ . Allora  $\exists T \in ]0, +\infty[$  tale che per ogni  $\vec{f} \in L^p(R)^m$  esiste  $\vec{u} \in L^p(R)^m$  per cui:



$$(3.9) \quad t \partial_t \vec{u} - A(t) \vec{u} = \vec{f}(t) \text{ su } (-T, T).$$

Prova. Sia  $T > 0$  e  $\chi_T$  la funzione caratteristica di  $[-T, T]$ .  
Se  $\vec{f} \in L^p(-T, T)^m$  e consideriamo  $E \chi_T \vec{f}$ , con  $E$  definito in (3.3), si ha:

$$\begin{aligned} (t \partial_t I_m - A(t)) E \chi_T \vec{f} &= \\ &= (t \partial_t I_m - A(0) - t B(t)) E \chi_T \vec{f} = \\ &= \chi_T \vec{f} - t B(t) E \chi_T \vec{f}, \end{aligned}$$

dove  $B(t) = \frac{(A(t) - A(0))}{t} \in C^\infty(I; L(C^m))$ . Ora

$$\begin{aligned} \|t B(t) E \chi_T \vec{f}; L^p(-T, T)^m\| &\leq \\ &\leq C T \sup_{|t| \leq T} |B(t)| \|\chi_T \vec{f}; L^p(R)^m\| \leq \\ &\leq C T \sup_{|t| \leq T} |B(t)| \|\vec{f}; L^p(-T, T)^m\| \end{aligned}$$

con  $C > 0$  indipendente da  $T$  ed  $\vec{f}$ . Pertanto se  $T < \bar{T}$  risulta che la norma di  $t B(t) E \chi_T$  come operatore da  $L^p(-T, T)^m$  in sè è  $< 1/2$ , sicché  $I_m - t B(t) E \chi_T$  è invertibile su  $L^p(-T, T)^m$ .

Sia dunque assegnata  $\vec{g} \in L^p(R)^m$  e posto  $\vec{f} = \vec{g}|_{[-T, T]}$ , sia  $\vec{\phi} \in L^p(-T, T)^m$  tale che  $(I_m - t B(t) E \chi_T) \vec{\phi} = \vec{f}$ . Ponendo  $\vec{u} = \chi_T \vec{\phi}$  si ha  $\vec{u} \in L^p(R)^m$  e  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u} = \vec{g}$  su  $(-T, T)$ .

q.e.d.

Corollario 2. Dato  $t \partial_t I_m - A(t)$  con  $\sigma(A(0)) \cap \{\operatorname{Re} z = -1/p\} = \emptyset$ , per un  $p \in (1, +\infty)$ , assegnata  $\vec{f} \in C^\infty(I)^m$  esiste  $\vec{u} \in L^p_{loc}(I)^m \cap C^\infty(I \setminus \{0\})^m$  tale che  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{u} = \vec{f}$  su  $I$ .

Prova. Sappiamo già che esiste  $\vec{v} \in L^p(-T, T)^m$ , con  $T > 0$  opportuno,  $(-T, T) \subset I$ , tale che  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{v} = \vec{f}$  su  $(-T, T)$ . Siccome  $\vec{f} \in C^\infty$  ne segue che  $\vec{v} \in C^\infty((-T, T) \setminus \{0\})^m$ . Se  $I = (-a, b)$ , costruiamo  $\vec{\phi} \in C^\infty([T/2, b))^m$  e  $\vec{\psi} \in C^\infty((-a, -T/2])^m$  tali che:

$$(3.10) \quad \begin{cases} (t \partial_t I_m - A(t)) \vec{\phi} = \vec{f} & \text{su } [T/2, b) \\ \vec{\phi}(T/2) = \vec{v}(T/2) \\ (t \partial_t I_m - A(t)) \vec{\psi} = \vec{f} & \text{su } (-a, -T/2] \\ \vec{\psi}(-T/2) = \vec{v}(-T/2) \end{cases}$$

Ponendo:

$$(3.11) \quad \vec{u}(t) = \begin{cases} \vec{v}(t) & , \quad t \in [-T/2, T/2] \\ \vec{\phi}(t) & , \quad t \in [T/2, b[ \\ \vec{\psi}(t) & , \quad t \in ]-a, -T/2] \end{cases}$$

si ha che  $\vec{u}$  soddisfa quanto richiesto.

q.e.d.

Possiamo ora formulare il risultato principale.

Indicheremo con  $\mathcal{D}'_0$  lo spazio dei germi di distribuzioni definite in un intorno di  $t = 0$ . Si ha il

Teorema 2. Sia  $P$  un operatore di Fuchs d'ordine  $m$  e peso  $m-k$  definito su un intorno  $I$  di  $t = 0$ . Allora  $P : \mathcal{D}'_0 \rightarrow \mathcal{D}'_0$  è suriettiva e  $\dim \text{Ker } P = m + k$ .

Prova. Ragioniamo dapprima nel caso  $m = k$  e sia  $t \partial_t I_m = A(t)$  il sistema equivalente associato a P. Supponiamo, per cominciare, che l'ipotesi di Fuchs sia soddisfatta. In tal caso basterà provare che  $t \partial_t I_m = A(0) : \mathcal{D}_0^m \rightarrow \mathcal{D}_0^m$  è suriettiva e che  $\dim \text{Ker}(t \partial_t I_m = A(0)) = 2m$ . Per semplificare le notazioni scriviamo A in luogo di  $A_0$ .

Senza minore generalità, usando il Teorema di Jordan, possiamo supporre che per un certo  $\gamma \in \mathbb{C}$  sia:

$$(3.12) \quad A(0) = A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & & \\ & \lambda & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \varepsilon \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

dove  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ci limitiamo quindi a studiare la suriettività ed il nucleo di  $t \partial_t I_N = \Lambda : \mathcal{D}_0^N \rightarrow \mathcal{D}_0^N$  ( $N$  è la dim. di  $\Lambda$ ).

Se B è una matrice  $N \times N$  della forma (3.12) definiamo le matrici distribuzioni:

$$(3.13) \quad (t \pm i0)^B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0 \pm} (t + i\varepsilon)^B \in \mathcal{D}'(R_t; L(\mathbb{C}^N)).$$

Si noti che se  $B = \lambda I_N$  allora  $(t \pm i0)^B = (t \pm i0)^\lambda I_N$ . Se invece

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ - & - & - & - & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(3.13)' \quad (t \pm i0)^B = (t \pm i0)^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} \ln(t \pm i0) & \frac{1}{(N-1)!} [\ln(t \pm i0)]^{N-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{(N-2)!} [\ln(t \pm i0)]^{N-2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che  $W F((t \pm i0)^\lambda)$  e  $W F(\ln(t \pm i0))$  sono dati da  $\{(0, \tau) | \tau \geq 0\}$  e quindi i prodotti indicati hanno senso. Ricordiamo che:

$$(3.13)'' \quad \ln(t \pm i0) = \begin{cases} \ln t, & t > 0 \\ \ln|t| \pm i\pi, & t < 0 \end{cases}$$

Ciò premesso definiamo le matrici distribuzioni:

$$(3.14) \quad K_{\pm}(t, s) = Y(t - s) [(t \pm i0)^\Lambda \otimes (s \pm i0)^{-\Lambda} - I_N],$$

$$\text{dove} \quad \langle Y(t - s), \vec{\phi}(t, s) \rangle = \iint_{t \geq s} \vec{\phi}(t, s) dt ds, \quad \vec{\phi} \in C_0^\infty(R^2)^N.$$

Usando il Teorema di moltiplicazione di Hörmander si ha:

$$(3.15) \quad W F'(K_{\pm}) \subset \Delta_{T^*R^2} \cup \{(0, 0; \tau, \sigma) | \begin{cases} \tau \geq \sigma \\ \tau \leq \sigma \end{cases} \} \\ \cup \{(t, 0; 0, \sigma) | \begin{cases} \sigma < 0 \\ \sigma > 0 \end{cases} \} \cup \{(0, s; \tau, 0) | \begin{cases} \tau > 0 \\ \tau < 0 \end{cases} \}.$$

Dunque l'operatore  $K_{\pm}$  si prolunga con continuità ad ogni  $\vec{f} \in E'(R)^m$  per cui  $W F(\vec{f}) \cap N_{\pm} = \{(0, \sigma) | \begin{cases} \sigma < 0 \\ \sigma > 0 \end{cases} \} = \emptyset$  e  $K_{\pm} \vec{f} \in \mathcal{D}'(R)^N$  con:

$$(3.16) \quad W F(K_{\pm} \vec{f}) \subset W F'(K_{\pm}) \circ W F(\vec{f}) \cup N_{\pm},$$



in particolare:

$$(3.17) \quad W F(K_{\pm} \vec{f}) \cap N_{\pm} = \phi$$

Ora:

$$\begin{aligned} t \partial_t K_{\pm}(t,s) &= t [\partial_t Y(t-s)] (t \pm i o)^{\Lambda} \otimes (s \pm i o)^{-\Lambda - I_N} \\ &+ Y(t-s) (t \partial_t (t \pm i o)^{\Lambda}) \otimes (s \pm i o)^{-\Lambda - I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Poiché} \quad \langle \partial_t Y(t-s), \vec{\phi}(t,s) \rangle &= - \iint_{t \geq s} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s) dt ds = \\ &= - \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s) dt \right] ds - \int_{-\infty}^0 \left[ \int_s^{+\infty} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s) dt \right] ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \vec{\phi}(s,s) ds + \int_{-\infty}^0 \vec{\phi}(s,s) ds = \langle \delta(t-s), \vec{\phi}(t,s) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad t \delta(t-s) = \delta(t-s) t = \delta(t-s)(t+i o), \text{ ne segue che}$$

$$\begin{aligned} t \partial_t K_{\pm}(t,s) &= \delta(t-s) [(t \pm i o)^{\Lambda + I_N} \otimes (s \pm i o)^{-\Lambda - I_N}] \\ &+ \Lambda Y(t-s) [(t \pm i o)^{\Lambda} \otimes (s \pm i o)^{-\Lambda - I_N}]. \end{aligned}$$

Passando agli operatori:

$$(3.18) \quad (t \partial_t I_N - \Lambda) K_{\pm} = I_N$$

Sia ora  $\vec{f} \in \mathcal{D}'^N$ , dunque  $\vec{f} \in \mathcal{D}'((-T,T))^N$  per qualche  $T > 0$ . Utilizzando un cut-off si può supporre  $\vec{f} \in \mathcal{E}'(R)^N$ .

Siano  $\chi_+(t, D_t)$ ,  $\chi_-(t, D_t)$  due operatori pseudo-differenziali propri d'ordine 0 tali che  $W F(\chi_{\pm} \vec{f}) \cap N_{\pm} = \phi$  e  $\vec{f} = (\chi_+ \vec{f} + \chi_- \vec{f})$  sia  $C^{\infty}$

in un intorno dell'origine. Utilizzando il Corollario 3 si trova  $\vec{v} \in L^p(\mathbb{R})^N$ , per qualche  $p \in (1, +\infty)$  tale che  $(t \partial_t I_N - \Lambda) \vec{v} = \vec{f} - (\chi_+ \vec{f} + \chi_- \vec{f})$  in un intorno di  $t = 0$ .

Poniamo  $\vec{u} = \vec{v} + K_+ \vec{f}_+ + K_- \vec{f}_-$ , allora  $\vec{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})^N$  e  $(t \partial_t I_N - \Lambda) \vec{u} = \vec{f}$  in un intorno di  $t = 0$ .

Di conseguenza  $(t \partial_t I_N - \Lambda) : \mathcal{D}'_0 \rightarrow \mathcal{D}'_0$  è suriettivo. Sia ora  $\vec{u} \in \mathcal{D}'(-T, T)^N$  tale che  $(t \partial_t I_N - \Lambda) \vec{u} = 0$  su  $(-T, T)$ . Per  $t \neq 0$   $\vec{u} \in C^\infty$  e sarà del tipo:

$$(3.19) \quad u(t) = \begin{cases} t^\Lambda \alpha & , \quad t > 0 \\ |t|^\Lambda \beta & , \quad t < 0 \end{cases}$$

per certi vettori  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^N$ .

L'idea è di recuperare  $\vec{u}$  (o piuttosto il suo germe) in  $\mathcal{D}'_0$  come una combinazione lineare di  $(t + i0)^\Lambda$ ,  $(t - i0)^\Lambda$ .

Consideriamo quindi:

$$(3.20) \quad \vec{v}(t) = (t + i0)^\Lambda a + (t - i0)^\Lambda b, \quad a, b \in \mathbb{C}^N$$

Ora si ha:

$$(3.21) \quad (t \pm i0)^\Lambda = \begin{cases} t^\Lambda & , \quad t > 0 \\ |t|^\Lambda e^{\pm i\pi\Lambda} & , \quad t < 0. \end{cases}$$

Sicché si devono scegliere  $a, b \in \mathbb{C}^N$  in modo tale che  $a + b = \alpha$  e  $a + e^{-2\pi i \Lambda} b = e^{-i\pi\Lambda} \beta$  e questo è possibile univocamente se e solo se  $\lambda \notin \mathbb{Z}$ . Dunque se  $\lambda \notin \mathbb{Z}$ ,

$$(3.22) \quad \vec{v}(t)|_{t \neq 0} = (t + i 0)^\Lambda a + (t - i 0)^\Lambda b|_{t \neq 0}$$

Si tratta di vedere se il sistema omogeneo  $t \partial_t I_N - \Lambda$  ha una soluzione con supporto in  $t = 0$ . Una tale  $\vec{v}(t)$  è del tipo  $\vec{v}(t) = \sum_{k \leq r} \delta_t^{(k)} c_k$ ,  $c_k \in \mathbb{C}^N$ . Se  $\Lambda = \lambda I_N$ , poiché  $t \partial_t \delta_t^{(k)} = - (k+1) \delta_t^{(k)}$ , ne segue che  $\lambda \in \{-1, -2, \dots\}$ , che abbiamo escluso. Se  $\Lambda$  è in forma di Jordan non diagonale, l'ultima equazione è  $t \partial_t v_N = \lambda v_N$  e quindi ancora  $\lambda \in \{-1, -2, \dots\}$ , caso escluso.

Prendiamo ora il caso  $\lambda \in \mathbb{Z}_+$  allora

$$(3.23) \quad \vec{v}(t)|_{t \neq 0} = t_+^\Lambda \alpha + t_-^\Lambda \beta|_{t \neq 0}$$

dove

$$\langle t_+^\Lambda, \vec{\phi} \rangle = \int_0^{+\infty} t^\Lambda \vec{\phi}(t) dt, \quad \langle t_-^\Lambda, \vec{\phi} \rangle = \int_{-\infty}^0 |t|^\Lambda \vec{\phi}(t) dt,$$

per  $\vec{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^N$ .

Resta da considerare il caso  $\lambda \in \{-1, -2, \dots\}$ .

Se  $\Lambda = \lambda I_N$  allora il sistema è:

$$(3.24) \quad t \partial_t v_j - \lambda v_j = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Ciò richiede, se  $\lambda = -n$ :

$$(3.25) \quad \vec{v} = t^{-n} I_N \alpha + \delta_t^{(n-1)} I_N \beta,$$

per certi  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^N$ . D'altra parte:

$$(t \pm i 0)^\Lambda = (t \pm i 0)^\lambda I_N = (t^{-n} \mp i \pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta_t^{(n-1)}) I_N.$$

Dunque, in tal caso,

$$(3.26) \quad \vec{v} = (t + i 0)^\Lambda a + (t - i 0)^\Lambda b,$$

per due vettori,  $a, b \in \mathbb{C}^N$  univocamente determinati.

$$(\text{si prende } a + b = \alpha, \quad i \pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (b - a) = \beta).$$

Supponiamo ora che  $\Lambda$  sia nella forma di Jordan non diagonale:

$$(3.27) \quad \begin{cases} t \partial_t v_j = \lambda v_j + v_{j+1}, & j = 1, \dots, N-1 \\ t \partial_t v_N = \lambda v_N \end{cases}$$

Farò il ragionamento se  $N = 2$  e  $\lambda = -1$ .

Un calcolo mostra che

$$(3.28) \quad (t \pm i 0)^{-1} \ln(t \pm i 0) = \frac{1}{t} \ln|t| \pm i \pi g - \pi^2 \delta,$$

dove

$$(3.28)' \quad \langle g, \phi \rangle = \int_{-1}^0 \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\phi(t)}{t} dt$$

Quindi, se  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$(3.29) \quad (t \pm i 0)^\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \mp i \pi \delta & \frac{1}{t} \ln|t| \pm i \pi g - \pi^2 \delta \\ 0 & \frac{1}{t} \mp i \pi \delta \end{pmatrix},$$

si noti che  $t \partial_t g = -g - \delta$ .

Se  $v_1, v_2$  risolvono (3.27), allora  $v_2$  è necessariamente del tipo:



$$(3.30) \quad v_2(t) = \alpha_2 \frac{1}{t} + \gamma \delta_t, \quad \text{per certi } \alpha_2, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Siccome  $t \partial_t v_1 = -v_1 + v_2$ , allora per  $t \neq 0$ :

$$(3.31) \quad v_1(t) = \begin{cases} \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t|, & t > 0 \\ \hat{\alpha}_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t|, & t < 0 \end{cases},$$

per certi  $\alpha_1, \hat{\alpha}_1 \in \mathbb{C}$ ; (3.31) si scrive

$$v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) g, \quad \text{per } t \neq 0.$$

In conclusione:

$$(3.32) \quad v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) g + \beta \delta_t,$$

per qualche  $\beta \in \mathbb{C}$ .

Imponendo di soddisfare il sistema, si ha  $-(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) = \gamma$ ,

i.e.  $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \gamma$ . Concludendo:

$$(3.33) \quad \begin{cases} v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| - \gamma g + \beta \delta_t \\ v_2(t) = \alpha_2 \frac{1}{t} + \gamma \delta_t \end{cases}$$

E' facile vedere che (3.33) si può scrivere nella forma  $(t + i0)^\Lambda a + (t - i0)^\Lambda b$  con  $a, b \in \mathbb{C}^2$ , univocamente determinati.

L'argomento può essere fatto in generale e quindi si conclude che  $\text{Ker}(t \partial_t I_N - \Lambda)$  come operatore da  $\mathcal{D}_0^{iN}$  in sè è generato dai germi corrispondenti a  $(t \pm i0)^\Lambda$ , se  $\lambda \notin \mathbb{Z}_+$  e da  $t_\pm^\Lambda$  se  $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ .

Dunque, se vale la condizione di Fuchs, il nucleo di

$t \partial_t I_m - A(t)$  come operatore da  $\mathcal{D}_0^N$  in sè ha dimensione  $2m$ .

Vediamo ora come si toglie la condizione di Fuchs.

Risolubilità. Possiamo supporre di avere  $\vec{f} \in E'(R)^m$  con  $\vec{f} = \vec{g} + \vec{f}_+ + \vec{f}_-$ ,  $\vec{g} \in C^\infty((-T, T))^m$  per qualche  $T > 0$  e  $\vec{f}_\pm \in E'(R)^m$ , con  $WF(\vec{f}_\pm) \cap N_\pm = \emptyset$ .

Per il Corollario 3 esiste  $\vec{v} \in L^p(R)^m$  (per qualche  $p$ ) con  $(t \partial_t I_m - A(t)) \vec{v} = \vec{g}$  su un intorno di  $t = 0$ .

Ragioniamo ora su  $\vec{f}_+$ ; supporremo che  $A(t)$  sia della forma  $\hat{A}(t)$ , (1.19), (1.19)'; associamo a  $t \partial_t I_m - \hat{A}(t)$  il sistema  $t \partial_t I_m - A^\#(t)$  dove  $A^\#(0)$  ha il solo autovalore  $\mu$ . Dunque, per quanto visto prima, esiste  $\vec{v}_+(t)$  con  $WF(\vec{v}_+(t)) \cap N_- = \emptyset$  tale che  $(t \partial_t I_m - A^\#(t)) \vec{v}_+(t) = \vec{f}_+(t)$  in un intorno di  $t = 0$  ( $\vec{f}_+$  si ottiene da  $f_+$  facendo le trasformazioni lineari che fanno passare da  $\hat{A}(t)$  ad  $A^\#(t)$ ). Ragioniamo ora per semplicità sul caso  $l = 2$ . Abbiamo quindi:

$$(3.34) \quad \begin{cases} t \partial_t \vec{v}_1 = \alpha(t) \vec{v}_1 + \beta(t) \vec{v}_2 + \vec{f}_{1+} \\ t \partial_t \vec{v}_2 = \gamma(t) \vec{v}_1 + (\delta(t) + I) \vec{v}_2 + t \vec{f}_{2+} \end{cases}$$

ora poniamo  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$  e  $\vec{u}_2 = (t + i0)^{-1} \vec{v}_2$  notando che il prodotto è ben definito perché  $WF(\vec{v}_2) \cap N_- = \emptyset$ ! allora  $t \vec{u}_2 = \vec{v}_2$  e quindi;  
 $t \partial_t \vec{u}_1 = \alpha(t) \vec{u}_1 + t \beta(t) \vec{u}_2 + \vec{f}_{1+}$ , mentre  $t \partial_t \vec{u}_2 = [t \partial_t (t + i0)^{-1}] \vec{v}_2 + (t + i0)^{-1} t \partial_t \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 + \gamma(t) \vec{u}_1 + (\delta(t) + I) \vec{u}_2 + \vec{f}_{2+} = \gamma(t) \vec{u}_1 + \delta(t) \vec{u}_2 + \vec{f}_{2+}$ . Concludendo,  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  risolvere il sistema.  
 Discorso analogo per  $\vec{f}_-$ . Resta così provato che  $t \partial_t I_m - A(t): \mathcal{D}_0^m \rightarrow \mathcal{D}_0^m$  è suriettivo.

Modificando un po' l'argomento fatto nel caso in cui la condizione di Fuchs è soddisfatta si vede ancora che  $\text{Ker}(t \partial_t I_m - A(t))$  ha dimensione  $2m$  in  $\mathcal{D}_0^m$ .

Resta, infine, il caso  $m > k$ .

Poniamo  $\hat{P} = t^{m-k} P$ .  $\hat{P}$  è un Fuchsiano d'ordine  $m$  e peso  $0$ . Dico

che la successione:

$$(3.35) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } P \rightarrow \text{Ker } \hat{P} \xrightarrow{P} \text{Ker } t^{m-k} \rightarrow 0$$

è esatta.

Si ha:

$$\begin{aligned} \text{Ker } t^{m-k} &= \{u \in \mathcal{D}'_0 \mid t^{m-k} u = 0\} = \\ &= \{u \in \mathcal{D}'_0 \mid u \sim \sum_{j=0}^{m-k-1} c_j \delta_t^{(j)}, (c_0, \dots, c_{m-k-1}) \in \mathbb{C}^{m-k}\}, \end{aligned}$$

sicché  $\dim \text{Ker } t^{m-k} = m-k$ .

D'altra parte  $P : \text{Ker } \hat{P} \rightarrow \text{Ker } t^{m-k}$  è suriettiva. Infatti data  $\sum c_j \delta_t^{(j)}$  esiste  $u \in \mathcal{D}'_0$ ,  $Pu \sim \sum c_j \delta_t^{(j)}$  e quindi  $t^{m-k} Pu = \hat{P}u = 0$ . Dunque (3.35) è vera. Allora

$$(3.35)' \quad \text{Ker } \hat{P} / \text{Ker } t^{m-k} \simeq \text{Ker } P$$

e quindi  $\dim \text{Ker } P = 2m - (m-k) = m+k$ .

q.e.d.